

MicroEconomie 2 — Ienac T 98

Travaux dirigés

Cyril Hariton

Année 1999-2000

Bibliographie économique

Voici quelques références qui peuvent vous aider à mieux comprendre le cours et à aller au delà :

- ² H. Varian (1997) : "Introduction à la microéconomie", Collection "Ouvertures économiques", Série "Prémises", Edition De Boeck Université.
Pour revoir les notions essentielles, telles que les révisions faites en début de cours qui survolent les 22 (!) premiers chapitres du livre. Se lit très facilement.
- ² H. Varian (199?) : "Analyse microéconomique", Collection "Ouvertures économiques", Série "Balises", Edition De Boeck Université.
Pour compléter le cours et avoir une première approche formalisée.
- ² Jean-Jacques Laumont (1991) : "Cours de théorie microéconomique", Tomes I et II, Collection "Economie et statistiques avancées", Economica
Un cours extrêmement complet, très formalisé, par l'un des spécialistes mondiaux de l'économie théorique, professeur à l'Université de Toulouse (cocorico !). Un ouvrage de référence !
- ² A. Mas-Colell, M. Whinston, J. Green (1995) : "Microeconomy theory", Oxford University Press.
Pour se frotter à une formalisation poussée de l'économie, depuis ses fondements jusque bien au delà des chapitres traités ! C'est le livre de base pour les Dea d'économie à Toulouse ... Le chapitre sur les externalités en est inspiré.

Complément de cours 1 : Choix intertemporels

Que se passe t-il quand le consommateur doit optimiser ses choix non plus sur une seule période, comme jusqu'à présent, mais sur un ensemble de plusieurs périodes de temps ? Il faut, pour analyser les choix intertemporels du consommateur, faire intervenir le temps dans l'utilité du consommateur, et dans sa contrainte de revenu. Un revenu immédiat n'est en effet pas équivalent au même revenu demain ou dans un an. Les paragraphes suivants vont développer quelques aspects de la théorie du consommateur lorsque ce même consommateur vit plusieurs périodes.

Valeurs futures, valeurs présentes. Considérons pour simplifier, dans un premier temps, un seul bien (bien composite ou numéraire) dont le prix est égal à 1, et un espace temporel de deux périodes (aujourd'hui et dans un an). Le consommateur consomme C_1 en première période et C_2 en seconde période. Son revenu est M_1 en période 1 et M_2 en période 2. Il peut emprunter ou prêter de l'argent, à une tierce partie non précisée ici, à un taux d'intérêt nominal r entre la première et la seconde période. Les consommations et les revenus sont exprimés en grandeur monétaire et sont donc comparables.

Si $C_1 < M_1$ (épargne), la contrainte budgétaire du consommateur s'écrit :

$$C_2 = M_2 + (M_1 - C_1) + r(M_1 - C_1) = M_2 + (1 + r)(M_1 - C_1).$$

Si $C_1 > M_1$ (emprunt), cette contrainte s'écrit :

$$C_2 = M_2 - (C_1 - M_1) - r(C_1 - M_1) = M_2 + (1 + r)(M_1 - C_1).$$

Ces égalités sont donc identiques et peuvent être exprimées de deux manières différentes :

1. $(1 + r)C_1 + C_2 = (1 + r)M_1 + M_2$

Le flux monétaire du consommateur est alors écrit en valeurs futures. Un franc en période 2 vaut 1, alors que le même franc reçu en période 1 rapporte $1 + r$ en période 2. En effet, 1 franc placé au taux r en période 1 vaut $1 + r$ en période 2.

2. $C_1 + \frac{1}{(1+r)}C_2 = M_1 + \frac{1}{(1+r)}M_2$

Ici, au contraire, le flux monétaire est converti en francs de la période 1, c'est à dire en valeur présente ou actuelle (VP). Un franc consommé en période 1 vaut 1. Un franc consommé en période 2 ne vaut que $\frac{1}{1+r}$ en période 1, car en plaçant $\frac{1}{1+r}$ en période 1 au taux r , il rapporte 1 franc en période 2. Autrement dit, il est équivalent d'avoir $\frac{1}{1+r}$ francs en période 1 ou 1 franc en période 2.

Pour connaître la valeur d'un flux de paiements $F = (F_1; F_2; \dots; F_n)$ au cours du temps, les paiements de chaque période doivent être convertis en valeurs présentes ou, de manière plus générale, en valeurs actualisées à une même date (qui peut être présente ou future). Ainsi, ils sont comparables entre eux et peuvent être additionnés :

$$VP(F) = F_1 + \frac{F_2}{1+r} + \frac{F_3}{(1+r)^2} + \dots + \frac{F_n}{(1+r)^{n-1}}.$$

Le choix entre différents plans d'investissement ou de consommation s'effectue par comparaison des valeurs présentes de chacun de ces plans, c'est à dire de la somme des valeurs présentes des flux de chaque plan. Le projet dont la valeur présente est la plus élevée est celui qui génère le plus de bénéfices (actualisés à la période 1), donc le plus rentable. Le critère de la valeur présente permet donc de classer les différents flux de paiements entre eux.

Inflation. Le prix du bien peut se modifier entre les périodes. Le taux d'inflation $\%$ n'est autre que le taux de croissance des prix d'un panier de bien représentant un panier de consommation moyen. S'il faut 100^{FF} au temps t pour acheter le panier, et que le taux d'inflation est de $\%$ entre le temps t et le temps $t + 1$, il faudra $100 \text{ € } (1 + \%)^{FF}$ pour l'acheter en $t + 1$. Il s'agit donc d'un indice général car le taux de croissance des prix est en général différent selon les biens : le prix du pétrole peut augmenter, sans que celui du blé n'augmente.

Si le panier de bien n'est composé que d'un seul bien dont le prix à la période 1 vaut p_1 , et que l'économie connaît un taux d'inflation de $\%$, le nouveau prix sera $p_2 = p_1(1 + \%)$. La contrainte budgétaire devient alors :

$$p_2 C_2 = p_2 M_2 + p_1(1 + r)(M_1 - C_1) \quad \text{ou encore} \quad C_2 = M_2 + \frac{1+r}{1+\%}(M_1 - C_1).$$

Remarque : Ici, les consommations et les revenus ne sont pas exprimés en unité monétaire, mais en unité de bien de consommation.

Le taux d'intérêt réel ou taux d'intérêt $\frac{1}{2}$, tel que $1 + \frac{1}{2} = \frac{1+r}{1+\frac{1}{4}}$, est donc le vrai taux auquel fait face le consommateur. Le taux r est appelé taux d'intérêt nominal. C'est celui qui est indiqué par les banques lors d'un emprunt ou d'un placement d'argent. Il correspond au loyer de l'argent du point de vue de la banque seulement. Mais le consommateur ou l'entreprise doit prendre en compte l'inflation dans son calcul de la valeur présente d'une consommation ou d'un investissement. En effet, un taux nominal élevé, plutôt favorable à une consommation en période 2, peut être considérablement gêné par une inflation élevée, qui pousse au contraire à consommer aujourd'hui.

Le taux d'intérêt réel peut être approché par la différence entre le taux nominal et l'inflation dès lors que le taux d'inflation est faible :

$$\frac{1}{2} = \frac{1+r}{1+\frac{1}{4}} - i \quad 1 = \frac{r-i}{1+\frac{1}{4}} + \frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} r - i \approx \frac{1}{4}.$$

Ainsi, une inflation de 5 % conjuguée à un taux d'intérêt nominal de 10 % réduit quasiment de moitié ce taux d'intérêt avec un taux d'intérêt réel de 5 % !

Taux de rendement. Le taux de rendement d'un projet est par définition le taux d'intérêt réel qui annule la valeur présente de ce projet. C'est un critère utile pour décider de la viabilité d'un projet : si le taux de rendement est supérieur au taux d'intérêt réel observé, le projet est accepté. En effet, lorsque tous les flux sont positifs, la valeur présente est une somme d'hyperboles de degré plus ou moins important. Elle est donc décroissante par rapport au taux d'intérêt. Cela signifie qu'il faut que le taux d'intérêt réel augmente pour que le projet voit sa valeur présente devenir nulle. Ainsi, pour la valeur actuelle du taux d'intérêt réel, inférieure au taux de rendement, sa valeur présente est strictement positive.

Le critère du taux de rendement ne permet pas de classer les projets les uns par rapport aux autres. En effet, même si le taux de rendement t_A d'un projet A est inférieur au taux de rendement t_B d'un autre projet B, cela signifie simplement que la valeur présente de A s'annule pour un taux d'intérêt plus petit que pour B. Mais si le taux d'intérêt réel est inférieur aux deux taux de rendement, les deux projets sont alors sélectionnés d'après le critère du taux de rendement et rien n'indique si les valeurs présentes pour cette valeur du taux d'intérêt sont telles que $V_P(A) < V_P(B)$ ou le contraire.

Généralisation à n périodes. Sur plusieurs périodes, la contrainte budgétaire en valeur présente se généralise naturellement :

$$C_1 + \frac{1}{(1+\frac{1}{2})}C_2 + \dots + \frac{1}{(1+\frac{1}{2})^{n-1}}C_n = M_1 + \frac{1}{(1+\frac{1}{2})}M_2 + \dots + \frac{1}{(1+\frac{1}{2})^{n-1}}M_n.$$

où $\frac{1}{2}$ est le taux d'intérêt réel. Si ce taux d'intérêt réel ne change pas, un franc à la période t a donc une valeur actuelle de $\frac{1}{(1+\frac{1}{2})^{t-1}}$.

De plus, le taux d'intérêt réel peut se modifier (du fait du taux nominal ou de l'inflation). Dans ce cas, la contrainte devient :

$$C_1 + \frac{1}{(1+\frac{1}{2}_1)}C_2 + \frac{1}{(1+\frac{1}{2}_1)(1+\frac{1}{2}_2)}C_3 + \dots = M_1 + \frac{1}{(1+\frac{1}{2}_1)}M_2 + \frac{1}{(1+\frac{1}{2}_1)(1+\frac{1}{2}_2)}M_3 + \dots$$

où $\frac{1}{2}_i$ est le taux d'intérêt entre les périodes i et $i + 1$.

La variation du taux d'intérêt réel a des conséquences importantes, car elle induit des modifications dans les arbitrages entre les différentes périodes de temps. Si le taux d'intérêt réel $\frac{1}{2}_i$, entre les périodes i et $i + 1$, est important alors il favorise l'épargne au cours des périodes avant i pour une consommation après la période $i + 1$. Par contre, s'il est faible ou négatif, il favorise la consommation pour les périodes avant i .

Exemple d'investissement : l'obligation. Les titres sont des instruments financiers qui donnent droit à certains flux de revenus. Il en existe de nombreux types. Les obligations en sont un exemple. Les obligations sont des titres émis par une entreprise ou par un Etat, essentiellement pour leur permettre d'emprunter de l'argent.

L'obligation garantit à l'acheteur un revenu x (le coupon) sur n périodes (futures), puis un remboursement F (la valeur faciale) à la date $n + 1$. Le flux de paiement est donc $(x; x; \dots; F)$. Si le taux d'intérêt réel r est constant, la valeur présente d'une telle obligation se calcule facilement :

$$VP = \frac{x}{1+r} + \frac{x}{(1+r)^2} + \dots + \frac{F}{(1+r)^{n+1}}$$

Si la valeur présente est supérieure au prix payé, il peut être intéressant d'acheter l'obligation. Mais il faut être sûr que le taux d'intérêt va rester le même. Sur 15 ans, par exemple, c'est un pari risqué. En fait, la valeur de l'obligation va dépendre non seulement des taux présents, mais aussi des anticipations qu'ont les sociétés et les banques sur l'évolution des taux d'intérêt réels. C'est pour cela qu'il existe des marchés où ces obligations se vendent après leur émission par l'entreprise ou l'état.

Dans une période stable, où les taux d'intérêt bougent peu, il va être moins risqué d'investir dans ce genre de titres. Si la période est troublée, avec des risques d'inflation importante ou une instabilité des prix (pays d'Amérique latine), cela va dissuader les gens d'investir, et par conséquent il devient plus difficile pour les entreprises de se financer (ce qui n'améliore pas l'état de l'économie). C'est pourquoi il est important pour un pays d'avoir une inflation sinon nulle, mais au moins stable (si elle est stable, les acheteurs peuvent l'anticiper ...).

La valeur présente de l'obligation diminue avec une augmentation du taux d'intérêt. En effet avec un fort taux d'intérêt, les revenus futurs de l'obligation sont moins intéressants, car ils valent beaucoup moins par rapport à aujourd'hui. Sur le marché obligataire, la valeur de marché des obligations fluctue en fonction des modifications du taux d'intérêt réel et de son anticipation par les opérateurs ... ce qui peut laisser place à beaucoup de spéculation !

Il existe des obligations à perpétuité : $n \rightarrow \infty$. Leur valeur présente vaut :

$$VP = \frac{x}{1+r} + \frac{x}{(1+r)^2} + \dots = \frac{x}{r}$$

Tout comme pour une obligation classique, une augmentation du taux d'intérêt réduit la valeur de l'obligation à perpétuité.

Exercice 1 : Remboursement d'un emprunt par mensualités

Supposons que vous empruntez 1.000^{FF} pour acheter un cadeau à Noël et que la banque vous propose de rembourser 1.200^{FF} en 1 fois, un an plus tard.

1. Quel est le taux d'intérêt pratiqué par la (méchante !) banque ?

Maintenant, supposons qu'une banque concurrente vous propose de la rembourser en douze mensualités de 100^{FF} .

2. Quel est le taux d'intérêt pratiqué par la (gentille ...) banque ?

3. Conclure.

Exercice 2 : Taux de rendement multiples

Une compagnie pétrolière envisage d'équiper un puits de forage d'une pompe à haute puissance qui permettrait d'augmenter la production d'un gisement déjà en exploitation. L'installation de la pompe nécessiterait une dépense supplémentaire égale à 3 millions de francs l'année 0. L'année suivante (1), la compagnie serait en mesure d'extraire une quantité de pétrole supplémentaire dont la valeur, compte tenu des prévisions de prix, peut être estimée à 16 millions de francs. L'année 2, le gisement étant épuisé, la valeur du pétrole est de 0.

1. Exprimer la valeur présente du projet d'installation de la pompe en fonction du taux d'intérêt réel et la représenter graphiquement.
2. Le taux d'intérêt réel est estimé constant pour les deux prochaines années et égal à 12 %. L'entreprise doit-elle installer la pompe si elle retient le critère de la valeur présente ?
3. Dans ce même contexte, à quoi conduit le critère du taux de rendement ?

L'entreprise se rend compte que l'analyse de son projet est fautive. En effet, l'installation de la pompe à haute puissance épuise le pétrole en une période, mais sans cette pompe, le pétrole aurait rapporté 16 millions en période 2. Ainsi, la valeur du pétrole avec le projet serait réduite de 16 millions de francs par rapport à la situation où la pompe à haute puissance ne serait pas installée.

4. Quelle est la décision de l'entreprise sur la base de la valeur présente du projet ?
5. Et sur la base du critère de taux de rendement ?
6. Que faire pour éviter la difficulté rencontrée ?

Exercice 3 : Epargne et taux d'intérêt

Un individu vit deux périodes. Il dispose en première période d'un revenu R_1 et en deuxième période d'un revenu R_2 . A la période 1, il peut épargner une partie de son revenu R_1 pour la période 2 ou emprunter sur ses revenus futurs pour augmenter sa consommation de la période 1. Les deux types d'opération se font au taux d'intérêt réel r . Soit S l'épargne de l'individu : si $S > 0$ l'individu épargne, alors que si $S < 0$ l'individu emprunte. La consommation est $C_1 = R_1 - S$ en période 1 et $C_2 = R_2 + (1 + r)S$ en période 2.

L'utilité de l'individu ne dépend que de sa propre consommation à chacune des périodes. Elle est donnée par :

$$U(C_1; C_2) = P_{C_1} + \pm P_{C_2}.$$

1. Interpréter le facteur \pm dans l'utilité du consommateur.
2. Déterminer le niveau optimal de l'épargne S .
Comment varie cette épargne en fonction de R_1 , R_2 et r ?
3. Calculer la valeur présente de la richesse de l'individu, notée W .
Montrer que lorsque l'épargne est choisie de façon optimale, les consommations ne dépendent que de la richesse actualisée de l'individu et du taux d'intérêt.
Comment varient les niveaux de consommation de chaque période en fonction de W ?

Exercice 4 : Equilibre concurrentiel de court terme

Soit une technologie de production d'un bien générant une fonction de coût total de court terme définie par :

$$CT(y) = 40x_1 + 10\frac{y^2}{x_1},$$

où y désigne la quantité produite, et où x_1 est un niveau fixe (à court terme) du facteur capital. La seule variable modifiable par l'entreprise à court terme est le niveau de production y .

1. L'entreprise subit-elle un coût fixe à court terme ?
2. Déterminer les fonctions de coût marginal, de coût moyen de court terme et de profit.

Soit une entreprise au comportement concurrentiel, dont la fonction de coût à court terme s'écrit comme ci-dessus.

3. En dessous de quelle valeur du prix p du bien l'entreprise ferme-t-elle ?
4. Lorsque p excède cette valeur, l'entreprise réalise-t-elle des profits ?
5. Comment a-t-elle alors intérêt à se comporter ?
6. Déterminer la fonction d'offre de court terme de l'entreprise considérée à la question précédente.

Supposons maintenant que 10 entreprises identiques à la précédente opèrent sur le marché concurrentiel considéré, et utilisent chacune la même quantité de capital x_1 .

7. Comment s'écrit l'offre globale de court terme ?
8. Déterminer, à l'équilibre concurrentiel de court terme, la quantité échangée, le prix d'équilibre et le surplus des producteurs, sachant que la fonction de demande globale pour le bien considérée s'écrit : $D(p) = 400 - 4p$ et que $x_1 = 2$ pour toutes les entreprises.

Exercice 5 : Equilibre de long terme et intervention de l'Etat

Dans le cadre de l'exercice précédent, supposons que la demande globale du bien est : $D(p) = 400 - 4p$. De plus, une nouvelle technologie apparaît, caractérisée par une fonction de production de long terme faisant intervenir deux facteurs : le capital en quantité x_1 (facteur 1) et un second facteur en quantité x_2 (facteur 2), de la façon suivante :

$$y = (x_1 x_2)^{\frac{1}{3}}.$$

Les prix des facteurs 1 et 2 sont respectivement notés r_1 et r_2 , avec $r_1 = r_2 = 20$ francs.

1. Déterminer le taux marginal de substitution technique entre les facteurs de production. Déterminer la fonction de coût total de long terme de cette entreprise, c'est à dire la relation entre le coût de produire une quantité y de bien et cette même quantité de bien y .
2. Cette fonction de coût s'apparente-t-elle à une fonction de coût de court ou de long terme ? Sachant que la fonction de coût total de long terme de l'exercice précédent s'écrit $CT(y) = 40y$, le changement technologique est-il ici un progrès technologique ?

3. En supposant que l'entreprise agisse telle un monopole (elle prend en compte dans sa fonction de profit l'influence de la quantité qu'elle produit sur le prix de marché), déterminer la quantité échangée et le prix pratiqué par l'entreprise, ainsi que le profit réalisé par celle-ci.
4. L'Etat constate la pratique d'un prix de monopole et, par ailleurs, observe qu'une seconde entreprise, identique à celle déjà présente sur le marché, s'apprête à entrer sur ce dernier. En faisant éventuellement appel à un graphique, expliquer quelle vous semble être la meilleure décision publique, parmi les trois décrites ci-après, en supposant bien sûr que cette décision ait comme objet la satisfaction des consommateurs :

Décision 1 : L'Etat autorise la formation d'un duopole, mais veille à ce qu'aucune entente ne soit pratiquée entre les deux entreprises (on suppose alors que s'instaure une situation de concurrence pure et parfaite).

Décision 2 : L'Etat interdit à la seconde entreprise d'entrer sur le marché.

Décision 3 : L'Etat nationalise la branche et confie la production du bien à une entreprise unique soumise à l'équilibre budgétaire (elle ne peut faire de profit positif et doit donc équilibrer son budget).

Exercice 6 : Externalité liée à un aéroport

Soit le cadre simplifié suivant : un pays est composé par une seule ville A composée de I habitants, la population du reste du pays étant négligeable. Ce pays offre à ses habitants un seul lieu touristique appelé T, dont la population est supposée négligeable, par souci de simplification.

Il existe dans cette économie deux biens, 1 et 2. Le bien 2, noté x_2 , est le nombre d'allers-retours en avion de A à T. Cette quantité sera supposée continue (et non pas un entier naturel). Le bien 1, noté x_1 , représente une "agrégation" de l'ensemble des autres biens disponibles, sans plus de détails (hypothèse classique du "bien numéraire"). Chaque consommateur dispose de 4 unités de bien 1 comme ressource initiale.

D'autre part, l'industrie du voyage est supposée être représentée par une seule compagnie aérienne. Le bien 2, le nombre de voyages proposés par la compagnie aérienne, est produit en quantité y_2 à partir d'une quantité y_1 (numéraire) de bien 1 selon la technologie suivante :

$$y_2 = p \sqrt{y_1}; \quad y_1 \geq 0; \quad y_2 \geq 0.$$

Enfin, la situation géographique de l'aéroport de la ville A est à l'origine d'une nuisance sonore identique pour l'ensemble des habitants de A : cette externalité négative agit sur les préférences de chaque habitant i , de sorte que l'utilité de l'agent i dépend non seulement des quantités x_1^i de bien 1 et x_2^i de bien 2 qu'il consomme, mais également de la quantité totale y_2 de bien 2 produite :

$$U^i(x_1^i; x_2^i; y_2) = x_1^i + \ln x_2^i + \frac{1}{2} \ln y_2; \quad i = 1; \dots; I.$$

Chaque consommateur i considère l'effet externe comme une donnée, c'est à dire que le nombre d'allers-retours qu'effectue i entre A et T affecte le nombre total de vols de manière négligeable. D'autre part, le prix du bien numéraire est posé égal à 1 et celui du bien 2 est noté p .

Supposons dans un premier temps que chaque consommateur reçoit $\frac{1}{I}$ ième des profits de l'unique compagnie aérienne qui dessert la ligne A-T.

1. Déterminer l'équilibre concurrentiel de propriété privée de cette économie.
Indice : Quels sont les programmes du consommateur et de l'entreprise ? Quelle est l'offre de la branche et la demande des consommateurs ?
2. Expliquer pourquoi l'équilibre concurrentiel n'est pas (a priori) un optimum de Pareto.
3. Caractériser les optima de Pareto dans lesquels tous les consommateurs ont une consommation positive de bien 1.
4. Quel est l'optimum de Pareto qui correspond à la maximisation du critère égalitariste de Rawls (ce critère correspond à maximiser l'utilité du plus défavorisé des individus ; les individus étant tous identiques ici, cela signifie que tous les individus sont traités de la même façon) ?
5. Calculer la perte d'utilité par habitant de l'équilibre concurrentiel par rapport à cet optimum de Pareto.
6. Dans une économie concurrentielle, quel est le montant de la taxe, par aller-retour, qu'il faut imposer à la compagnie aérienne pour restaurer l'efficacité Parétienne (le budget de l'Etat est équilibré avec des transferts forfaitaires aux consommateurs) ?
7. Quel est le niveau d'utilité atteint par un consommateur type lorsque le transfert forfaitaire est le même pour tous les consommateurs ?
8. Que se passe-t-il si l'Etat ne redistribue pas la taxe aux consommateurs ?

Le niveau de taxe calculé posant des difficultés (politiques) de mise en place, l'Etat nationalise la compagnie aérienne et lui impose d'équilibrer son budget.

9. Montrer que cette politique est encore plus défavorable pour le consommateur que le 'laissez-faire' de la première question.
10. Expliquer pourquoi cette politique est défavorable.

Après nationalisation et imposition de l'équilibre budgétaire, l'Etat décide de taxer la consommation de séjours touristiques, en supposant que les transferts forfaitaires peuvent être transférés aux consommateurs.

11. Quelle est la taxe optimale ?
12. Pourquoi retrouve-t-on un optimum de Pareto ?
13. Expliquer pourquoi le montant des taxes prélevées est supérieur à celui obtenu dans la question 6.
14. Que se passe-t-il si l'Etat ne redistribue pas la taxe aux consommateurs ?
15. Si on sait, par ailleurs, que 10 % de la taxe est systématiquement perdue du fait des frais de collecte (administration, plaintes, contrôles), quelle est la meilleure des solutions entre les questions 6 et 11 ?

Exercice 7 : Bien public

Soit une économie composée de I individus, repérés par l'indice $i = 1; \dots; I$. Cette économie comporte deux biens publics produits en quantités x_1 et x_2 , ainsi qu'un bien privé acheté par les consommateurs en quantité y_i et un bien numéraire (représentant l'argent consacré à l'ensemble des autres biens non explicités dans ce modèle).

L'individu dispose d'un revenu initial R_i qu'il partage donc entre le bien privé y_i , le numéraire m_i et le paiement d'une taxe t_i destinée à financer la production des biens publics. Cette taxe prendra plusieurs formes dans les questions suivantes. Les individus ont des fonctions d'utilité identiques :

$$U_i = m_i + \ln y_i + \ln x_1 + 2 \ln x_2$$

Les biens publics x_1 et x_2 sont produits sans coût fixe et avec des coûts unitaires de production (respectivement) c_1 et c_2 . Le financement de la production de ces biens publics est assuré par le prélèvement des taxes t_i . Dans la suite, le prix du bien privé sera supposé normalisé à 1, et les dotations initiales des individus seront $R_1 = \dots = R_I = 5$.

Supposons que cette taxe est un impôt forfaitaire que tout individu doit payer à l'Etat : elle n'est donc pas une taxe à la consommation et n'est pas proportionnelle à y_i ou m_i .

1. Ecrire l'utilité des consommateurs sachant que les individus sont traités de manière identiques (critère de Rawls).
2. Calculer la consommation optimale de chacun des biens publics ainsi que du bien privé.
3. Montrer que cet optimum est identique à l'optimum de Pareto égalitaire de cette économie, c'est-à-dire l'optimum de Pareto où les I individus sont traités de manière identique.

Supposons que le financement des biens publics s'effectue par une taxe forfaitaire de $t_i = 2$ unités de revenu par individu, le reste des dépenses étant complété par une taxe ζ sur la consommation du bien privé y_i (taxe identique pour tous les utilisateurs). Le bien privé aura alors un prix de production de 1 (voir hypothèse initiale), mais un prix de consommation $p = \zeta + 1$.

4. Quel est l'optimum atteint lorsque l'Etat maximise la somme des utilités des consommateurs (sous leurs contraintes) ?

Imaginons que $t_i = 2; 5$ soit maintenant envisageable, mais pas plus.

5. Quelle est alors la taxe ζ sur la consommation du bien privé y_i qu'il faut que l'Etat impose pour assurer le financement du bien public aux niveaux x_1 et x_2 atteints par l'optimum de Pareto ? Attention, ici, ce sont les consommateurs qui choisissent leurs niveaux de consommation de y_i et m_i .
6. Vérifier que la solution avec la taxe précédente est moins intéressante pour le consommateur que la solution Pareto optimale.

Complément de cours 2 : Aléa moral

Les modèles d'aléa moral n'ont pas été étudiés en détail en cours de Microéconomie 2. Si leur étude théorique est parfois délicate, ils ont cependant de nombreuses applications simples. Les exercices suivants en sont deux exemples.

Les modèles d'aléa moral sont caractérisés par :

- ² un Agent qui a un choix à faire entre différentes actions ;
- ² un Principal qui n'est pas informé de l'action entreprise par l'Agent, mais dont l'utilité dépend de cette action ...
- ² ... et qui propose un contrat à l'Agent.

La différence fondamentale entre les modèles de sélection adverse et d'aléa moral réside dans le fait que, dans les premiers, l'Agent a une caractéristique/information privée qui lui est associée (ex : travailleur ou non) mais sur laquelle il n'a aucune influence, alors que dans les seconds, c'est l'Agent qui va décider de quelle action entreprendre (ex : travailler ou non). Cette action fait donc partie des choix qu'il effectue dans son programme de maximisation, au même titre que la consommation de chacun des biens du marché. En fonction de cette action, le Principal va avoir une utilité plus ou moins grande. L'objectif du Principal est donc d'inciter l'Agent à choisir l'action qui maximise son (Principal) utilité. Pour le convaincre, il propose à l'Agent, en échange de cette action, un transfert monétaire.

Les exemples sont nombreux : comment un professeur peut-il inciter ses étudiants à travailler (sans transfert, si possible !) ? comment l'Etat peut-il inciter les entreprises publiques, ou assurant des services publics, à faire les meilleurs choix pour la société et non pas ceux intéressent spécifiquement ces entreprises ? comment l'assurance incite-t-elle les individus qu'elle assure à avoir des comportements prudents ?

Voici deux exemples de modèles qui vous éclaireront sur l'intérêt et la généralité de la formalisation des modèles à aléa moral.

Exercice 8 : Assurance et risque moral

Un individu (agent) dispose d'une richesse initiale de 40 unités monétaires, composée entre autres d'une voiture d'une valeur de 20 (unités monétaires). Ce même individu fait face à un risque d'accident de la route. En cas d'accident, la voiture est supposée détruite et l'individu conserve une richesse totale de 20.

Supposons que cet individu ait la possibilité de moduler son risque d'accident par une action notée a qui est de deux types : la prudence (a_1) ou le laisser-faire (a_0). Si la prudence est choisie, la probabilité d'accident $\frac{1}{4}$ est de 0,25. Par contre, le laisser-faire est plus risqué avec une probabilité d'accident $\frac{1}{4} = 0,5$.

Cependant, réaliser cette action est coûteuse pour l'individu, qui doit fournir un effort différent entre la prudence : $e_1 = 1,01$; et le laisser-faire : $e_0 = 1$. L'individu a une utilité de la forme : $U = \ln x - e$ où x est le revenu annuel dont dispose l'individu, et e est l'effort qu'il a réalisé. Remarquez que, à revenu annuel identique, l'utilité est moins importante avec e_1 qu'avec e_0 .

L'assurance (principal) connaît les différentes probabilités d'accident en fonction de l'action de l'agent, mais elle ne peut observer quelle action ce dernier choisit effectivement. Le problème est alors de proposer un contrat d'assurance à l'individu qui maximise le profit de l'assurance. Ce contrat stipule que, en échange d'un paiement p par l'individu, l'assurance lui assure un transfert T en cas d'accident. Lorsque que $T = 20$, il s'agit d'une couverture totale, puisque toutes les conséquences monétaires de l'accident sont prises en charge par l'assurance.

Supposons dans un premier temps que l'assurance puisse vérifier le comportement de l'individu. Le contrat d'assurance est alors composé de trois parties : le paiement p de l'individu pour l'assurance, le transfert T payé en cas d'accident par l'assurance à l'individu et l'action a que l'individu s'engage à effectuer s'il veut pouvoir bénéficier du remboursement en cas d'accident.

1. Quels sont les contrats $(p; T; a)$ qui garantissent à la compagnie une espérance de profit nulle ?
2. Parmi ces contrats, quel est le meilleur du point de vue de l'individu ?

Supposons maintenant que l'assurance ne puisse pas vérifier le comportement de l'individu. Le contrat d'assurance est forcément limité au paiement p et au transfert T en cas d'accident. La situation est donc la suivante : l'assurance propose des contrats $(p; T)$ à l'individu qui choisit, en fonction de ces contrats, d'acheter ou non un des contrats, et l'action a qu'il réalise. Ce double choix doit maximiser l'espérance de son utilité.

3. Montrer que, si le contrat assure une couverture totale du risque ($T = 20$), l'individu choisit toujours l'action a_0 .
4. Montrer alors que l'agent préfère ne pas signer de contrat avec l'assurance.
5. Toujours dans ce cadre, montrer que si le contrat signé est $(p = 4; T = 16)$, l'individu choisit l'action a_1 et l'espérance de profit de la compagnie est nulle.
6. Montrer que l'individu préfère alors signer ce contrat avec l'assurance.
7. Conclure.

Exercice 9 : Incitation par l'intéressement aux profits

Des investisseurs (principal) créent une société en vue de développer un projet spécifique. Le revenu net de l'investissement initial est une variable aléatoire r qui ne peut prendre, pour simplifier, que deux valeurs : $r = 1$ en cas d'échec, $r = 15$ en cas de succès. Un manager (agent) est embauché pour prendre en charge ce développement et gérer le projet. Les chances de succès de cette entreprise sont très dépendantes des efforts e consentis par ce manager. Cet effort a , également pour simplifier, deux niveaux : $e = 0$ (pas d'effort) donne une probabilité de succès $\frac{1}{3}$, et $e = 1$ (effort) double cette probabilité à $\frac{2}{3}$. Les investisseurs ne peuvent pas vérifier ou mesurer le niveau d'effort consenti par le manager pour la gestion de leur projet.

L'utilité du manager dépend de son revenu monétaire t et de son effort e : $U = \ln t - e \ln 2$, dont il maximise l'espérance mathématique. Il accepte l'offre de travail s'il peut retirer une espérance d'utilité positive ou nulle (l'utilité qu'il obtient s'il ne travaille pas). Le profit de la société se limite au revenu net de l'investissement initial moins la rémunération du manager : $\frac{1}{4} = r - t$.

Un "contrat salarial" est un contrat qui propose un salaire fixe s au manager.

1. Montrer que si le manager accepte un tel contrat, il choisira toujours d'exercer un effort nul.
2. Déterminer le salaire fixe minimum à partir duquel le manager accepte le contrat.
3. Avec ce contrat, quelle est l'espérance de profit de l'entreprise ?

Un "contrat contingent" est un contrat qui propose au manager un paiement x en cas de succès et un autre paiement y en cas d'échec.

4. Pour un contrat $(x; y)$ donné, quel est le niveau d'effort fourni par le manager ?
5. Parmi les contrats qui incitent le manager à choisir $e = 1$ et lui procure une utilité espérée positive ou nulle, quel est celui qui minimise l'espérance de la rémunération du manager ?
6. Montrer qu'avec le contrat contingent minimisant la rémunération du manager, l'espérance du profit est supérieure à celle obtenue avec un contrat salarial.
7. Montrer que le contrat contingent minimisant la rémunération du manager peut être obtenu en versant un salaire s et en promettant au manager une fraction α du revenu net $(r - s)$, c'est-à-dire en lui donnant une fraction α des actions de la société (la rémunération est alors : $s + \alpha(r - s) = (1 - \alpha)s + \alpha r$).